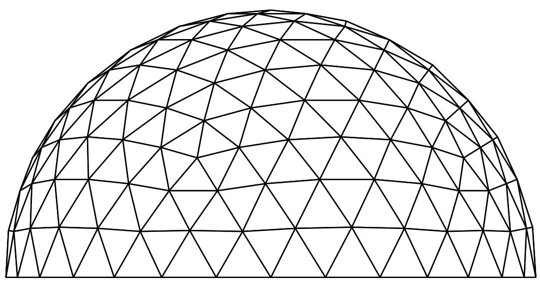
Geodätische Kuppeln

Tom Davis
tomrdavis@earthlink.net http://
www.geometer.org/mathcircles
6. Juni 2011

1 Was ist eine geodätische Kuppel?



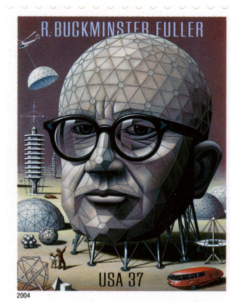


Abbildung 1: 6V Geodätischer Dome und Buckminster Fuller Stamp

Die geodätische Kuppel wurde von R. Buckminster (Buckyle) rF(u1l895-1983) im Jahr 1954. Fuller war ein Erfinder, Architekt, Ingenieur, Designer, Geometer, Cartogerraapnhd Philosoph. In Abbildung 1 ist ein ziemlich coe . dargestellt mxpl Version einer Kuppel, die aus kleinen Dreiecken besteht annähernd gleich und so, dass die Eckpunkte der Dreiecke liegen alle auf der Oberfläche einer Kugel. Rechts e offitghure ist eine kürzlich erschienene Briefmarke zu Ehren Voller.

In diesem Artikel werden wir uns die Mathematik ansehen, die hinter bnedhigeodesischen Kuppeln steckt, aber wir werden auch ein wenig darüber sprechen, warum sie technisch sinnvoll sind und wie sie für Sie sein könnten cetnesdtraus echten Materialien.

Es gibt viele Ressourcen im Internet zu geodätischen Domteosnwbetreffendw:w.desertdomes.com, die einen Dome-Rechner enthält, der viele der Berechnungen für Sie übernimmt.

2 Technische Überlegungen

Eine Kugel ist das mathematische Objekt, das die mam . enthält ximVolumen im Vergleich zu seiner Oberfläche, wenn also eine Struktur großvolumigen mit minimalen Kosten gebaut werden soll, ist es nicht sinnvoll, sich Strukturen anzusehen, deren Form sich einer Kugel annähert. Aber die meisten Baumaterialien kommen als flaches orgshttrsStücke, so dass die Kurven gebildet werden, die notwendig wären eine perfekte Kugel zu machen könnte die Kosten erhöhen coanbsliyd.er

Strukturen wie die in Abbildung 1 dargestellte schließen jedoch aus Praoximat-Kugeln, bestehen aber je nach Bauweise aus geraden Streben oder aus flachen Dreiecken.

Wenn die Struktur aus Streben besteht, gibt es eine andereid cdeRast; nämlich, dass es vollständig zusammengesetzt sein sollte von Dreiecken. Wenn es aus Vierecken oder mehrmcpolex-Polygonen besteht, können sie sich biegen, wenn die Verbindungen an den Enden nicht vollständig starr sind. Werden die Teile zB durch mehrere Streben mit einer Schraube verbunden, ist es fast unmöglich, die Gelenke steif zu machen. Wenn die Struktur jedoch vollständig aus Dreiecken besteht, kann sie vollständig steif gemacht werden, auch wenn die einzelnen Gelenke es nicht sind.

Eine letzte technische Überlegung ist, dass, wenn die Dreiecke, aus denen sich die Struktur zusammensetzt, alle so nahe wie möglich an gleichseitigen Dreiecken liegen, dann die Spannungen auf allen Streben annähernd gleich sind, so dass die Festigkeit verloren geht. Beachten Sie, dass im Modell am Anfangsisofhrtikel alle Dreiecke ungefähr gleichseitig erscheinen.

Schließlich ist es bei sehr großen Strukturen eine schlechte Idee, nicht unterstützte Streben zu verwenden. Je länger die Streben, desto leichter lassen sie sich bei Querkräften biegen.

3 perfekte und unvollkommene Lösungen

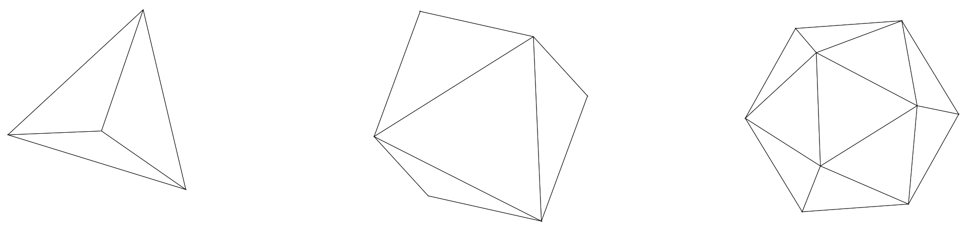


Abbildung 2: Platonische Körper

Eine perfekte Lösung besteht aus Dreiecken, die alle gleich groß sind und alle gleiche Winkel miteinander bilden. Leider ist dies nur mit drei mathematischen Formen möglich: dem Tetraeder, dem Oktaeder und dem Ikosaeder. Abbildung 2 veranschaulicht dies

Diese sogenannten platonischen Körper sind Näherungen an sich, aber nur das Ikosaeder ist sehr nahe, und um daraus eine große Struktur zu machen, wären sehr lange Streben erforderlich.

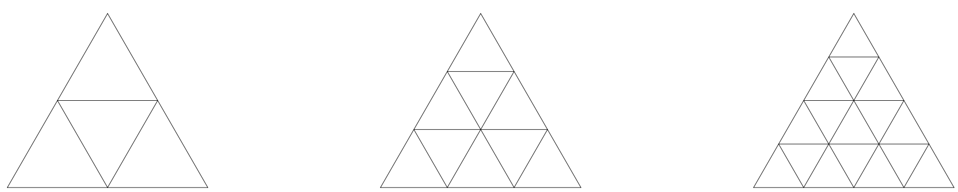


Abbildung 3: Gleichmäßige Dreiecksunterteilung

Eine Möglichkeit besteht darin, die Dreiecke einfach in regelmäßige platonische Körper zu unterteilen, und so wird eine geodätische Kuppel konstruiert. Jeder der drei Feststoffe könnte usbed, aber wie wir sehen werden, gibt es einige ernste Probleme, wenn dies mit einem Tetraeder beginnt, andsds-leere Probleme (aber dennoch Probleme), wenn wir mit einem Oktaeder beginnen.

Wir beginnen mit der Beschreibung der Standardkonstruktion von dsom unterschiedlicher Komplexität, beginnend mit einem Ikosaeder.

Es ist einfach, ein gleichseitiges Dreieck in 4, 9, o1r6, eine beliebige Anzahl von Quadraten von Unterdreiecken zu unterteilen, wie in Abbildung 3 dargestellt.

Aber wenn wir einfach die Dreiecke eines Ikosaeders unterteilen, so liegen die Scheitel des ursprünglichen Ikosaeders auf der Oberfläche einer Kugel, die Scheitel, die wir zum Unterteilen der Dreiecke benötigen, liegen in den Ebenen dieser Dreiecke und befinden sich physisch innerhalb der Kugel . Distel aus SOsr ubdivision wird auch tendenziell eine viel schwächere Struktur haben, alle denn um perfekt ebene Oberflächen zu erhalten, müsste die Stärke von Jot ints unendlich sein (siehe die „gefundene" Poesie aus einem Physiktext unten).

Daher kann keine noch so große Kraft
eine noch so feine Schnur in eine
horizontale Linie spannen
was genau gerade ist...

— William Whewell, Elementare Abhandlung über Mechanik (1819)

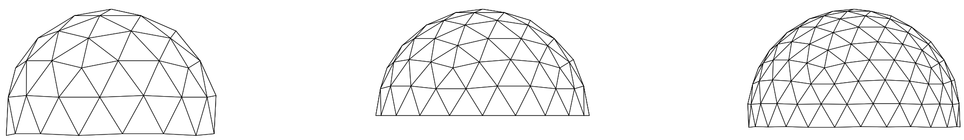


Abbildung 4: 3V, 4V und 5V Domes

Unsere Lösung besteht darin, diese Punkte einfach von der Mitte auf den Thuerfsace der Kugel zu „schieben“, aber dazu müssen wir in der Lage sein, mit dreidimensionalen Vektoren zu arbeiten anodrdcin oat-Systeme. Zuerst schauen wir uns einige der Tools an die benötigt werden um mit dreidimensionalen Vektoren zu arbeiten haenndw Wir beginnen mit einem genauen Blick auf das Ikosaeder.

Abbildung 5: 3V- und 5V-Dome: Kleine Versionen

Die Namen „3V“, „4V“ und „5V“ beziehen sich auf die Anzahl der Unterteilungen, die zu den ursprünglichen Dreiecken im Ikosaeder gemacht werden, bevor sie an die Oberfläche geschoben werden fles gibt. In Abbildung 1 sehen Sie auch eine 6V-Kuppel. Notiz dass die Kuppeln ungeraden Grades, die 3V- und die 5V-Dome, sindlysllia größer als eine halbe Kugel. Das liegt daran, wenn es gibt eine ungerade Anzahl von Dreiecken in der Unterteilung,eth isenr o Mittellinie oder „Äquator“, an der es geteilt werden soll, also wir muss eine Version wählen, die ein wenig größer oder ein wenig sm istEraltlhan eine halbe Kugel. In den Beispielen in Abbildung 4 gilt: Je größer Versionen wurden angezeigt. In Abbildung 5 sind die kleineren Werte der 3V- und 5V-Dome dargestellt.

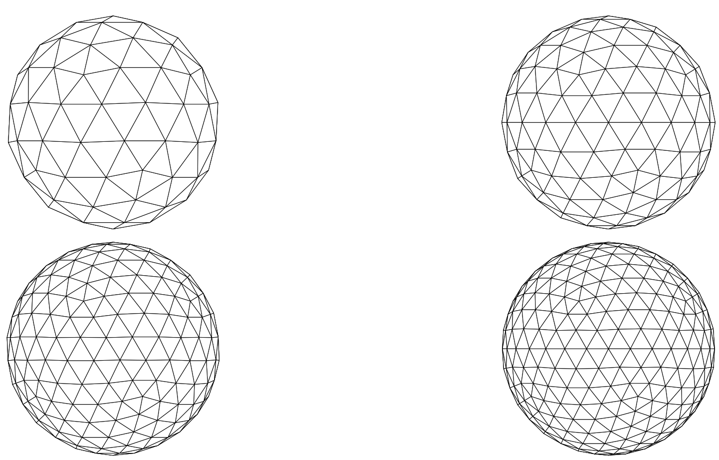


Abbildung 6: Kuppelkugeln: 3V, 4V, 5V und 6V

Sie können es nützlich finden, Bilder der ursprünglichen Sphäre zu sehen s fwhich alle oben genannten Kuppelmodelle wurden geschnitten. Diese sind in Abbildung 6 zu sehen. Aus diesen Bildern ist klar, theat4V als 6V Kugeln haben einen Äquator und die anderen nicht. Wenn jeder Scheitelpunkt der 3V-Kugel ein Carbom darstellt n ,dann repräsentiert die Kugel das Molekül namens „Buckminsterfullerine“, die wirklich existiert und einige sehr nützliche chemische und physikalische Eigenschaften hat.

Abbildung 7: Die 2V-Kuppel und -Kugel

Alle in den Abbildungen 5 und 4 gezeigten Kuppeln sind ziemlich vollständig cato bauen; das einfachste, das man vernünftigerweise nennen kann eine geodätische Kuppel ist die 2V-Version. Abbildung 7 zeigt die 2Ved(Oamhalbkugel) und die entsprechende 2V-Kugel.

Es ist offensichtlich, wenn man darüber nachdenkt, aber wenn man sich die Kugeln in Abbildung 6 genauer ansieht, kann man sehen, dass fast alle Scheitelpunkte auf größeren Kuppeln sechs Streben haben, die sich bei eacehv treffen Scheitelpunkte (auf der gesamten Kugel). Dies ist natürlich die Zahl der 5-gegen trrutitces gibt es im ursprünglichen Ikosaeder.

4 Vektorwerkzeuge

Wir werden unsere gesamte Arbeit in einem dreidimensionalen Münzsystem durchführen. Dies ist den zweidimensionalen Systemen sehr ähnlich, die in jedem High-Oslcahlogebra-Kurs mit a . eingeführt werdenx n und aja Achse, aber wir werden füge ein drittes hinzu, dasz Achse, die senkrecht zu den anderen beiden steht. Wenn wir von der Entstehung eines solchen Systems ausgehen, können wir jedem Punkt im Raum Richtungen geben, indem wir drei Zahlen angeben: Abstand, um zu jeder der Achsen parallel zu fahren (mit negativen Abständen bedeutet, sich in die entgegengesetzte Richtung zu bewegen)c. tio

Ein Werkzeug, das wir benötigen, ist eine Methode, um den Abstand zwischen Ptweonptowints zu bestimmen, aber dies kann als einfache Erweiterung des Satzes des Pythagoras erhalten werden. Wenn die beiden Punkte hcaovoerdinates$P_0 = (x_0, ja_0, z_0)$ und$P_1 = (x_1, ja_1, z_1)$, dann die DistanzD e zwischen ihnen ergibt sich aus der Formel:

$$D(P_0, P_1) = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (ja_0 - ja_1)^2 + (z_0 - z_1)^2}.$$

Natürlich, wenn einer der Punkte das Original istÖ in, dies reduziert sich auf:

$$D(O, P_0) = \sqrt{x_0^2 + ja_0^2 + z_0^2}.$$

Beachten Sie auch, dass, wenn Sie die Koordinaten haben, die beschreiben obajenct dann können Sie das Objekt gleichmäßig skalieren um alle Koordinaten mit einer Konstanten multiplizieren. Wenn Sie also Koordinaten für eine geodätische Kuppel mit einem Durchmesser von 1 Fuß haben und eine Kuppel mit einem Durchmesser von 20 Fuß bauen möchten, können Sie Lege alle Koordinaten für deine 1-Fuß-Kuppel fest und multiplizieren Sie sie mit 20, um die Koordinaten für die neue zu erhalten. ist Höhly, alle Strebenlängen werden 20-mal so lang sein, et cetera.

Aus diesem Grund werden wir in easysteo-Koordinaten arbeiten und wenn wir jemals eine echte Kuppel bauen wollen, brauchen wir nur einmal den passenden Faktor zu finden und alle Zahlen damit zu multiplizieren.

5 Das Ikosaeder

Ein Ikosaeder ist ein regelmäßiges Polyeder mit 20 Seiten, eacwhhoicfh ist ein gleichseitiges Dreieck und an jedem Scheitel treffen sich 5 Dreiecke (siehe Abbildung 8). Wenn Sie ein Ikosaedroh anzeigen nwonite Scheitelpunkt oben und ein weiterer unten, können Sie sehen Sie, dass es zwei Ringe mit jeweils fünf Knoten gibt, was aal otof t12 ergibt. Es gibt 20 Dreiecke, da 5 den oberen Scheitel berühren, 5 den unteren berühren und es 10 im Band arohuencdetnter gibt.

Es ist auch einfach, Kanten zu zählen: Es gibt 30. Dies liegt daran, dass die gesamte Figur in Dreiecke unterteilt ist, jedes der 20 Dreiecke hätte 3 Kanten, die 60 (nach dem Schneiden) ergeben ungekürzte Version würde halb so viele oder 30 enthalten.

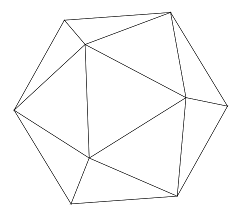


Abbildung 8: Ikosaeder

Sei $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.61803398875$ sei der goldene Schnitt. Dann die folgenden 12 PunkteEINts, B, . . . , Lsind die dreidimensionale Koordinaten eines regelmäßigen Ikosaeders, der im Ursprung nicht durchdrungen ist:

A = (0, 1,)	B = (0, −1,)	C = (0, −1, −φ)G	D = (0, 1, −φ)
E = (φ, 0, 1)	F = (−φ, 0, 1)	= (−φ, 0, −1)	H = (φ, 0, −1)
ich = (1, φ, 0)	J = (−1, φ, 0)	K = (−1, −φ, 0)	L = (1, −φ, 0)

Hier sind die 20 Dreiecke, die die Eckpunkte übermta . verbinden hkaet die Oberfläche des Ikosaeders auf:

AIJ AJF AFB ABE AEI BFK BKL BLE CDH CHL
CLK CKG CGD DGJ DJI DIH ELH EHI F JG FGK

Schließlich sind hier die 30 Kanten dieser Dreiecke:

AB AE AF AI AJ BE BF BK CG CH CK CL DG DH DI BL CD
DJ EL FG FJ FK GJ GK HI HL EH EI
IJ KL

Es ist etwas mühsam zu überprüfen, aber die Länge aller 30 SegmenteABm in der obigen Liste ist 2. Zum Beispiel ist die Länge von wird gegeben von:

$$|AB| = \sqrt{(0-0)^2 + (1-(-1))^2 + (\varphi-\varphi)^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Eine andere typische Berechnung ergibt die Länge des Segments T EINE:

$$\begin{aligned}
|AE| &= \sqrt{(0-\varphi)^2 + (1-0)^2 + (\varphi-1)^2} \\
&= \sqrt{\frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} + 1 + \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{4}} \\
&= \sqrt{12/4 + 1} = \sqrt{4} = 2.
\end{aligned}$$

Beachten Sie, dass alle Eckpunkte unseres Ikosaeders auf dem Fascuer einer im Ursprung zentrierten Kugel liegen. Das ist offensichtlich, denn in jedem Fall sind die Koordinaten in einer bestimmten Reihenfolge h0a, vae1und aφ, den letzten beiden möglicherweise ein negatives Vorzeichen vorangestellt. Aber um den Abstand vom Ursprung zum Thaint tp zu berechnen, müssen Sie nur alle drei Zahlen quadrieren (was eliminiert wird) jeglicher Einfluss von negativen Zahlen) addiere die drei te org(y th) ergibt in jedem Fall die gleiche Summe) und nimm die Quadratwurzel des Ergebnisses.

Für die von uns gewählten Koordinaten stellt sich heraus, dass die Kugel, in die das Ikosaeder eingeschrieben ist, ungefähr1T . 90211303 Einheiten. Dies ist keine besonders schöne Zahl, aber es lohnt sich, besonders schöne und relativ einheitliche Koordinaten für alle Scheitelpunkte zu haben.

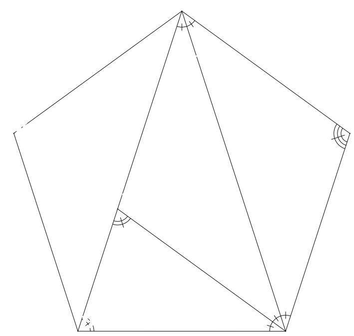


Abbildung 9: Der Goldene Schnitt

Eine schöne Möglichkeit, die Eckpunkte eines Ikosaeders zu visualisieren, besteht darin, dass sie auf den Ecken von drei Rechtecken liegen, die im Ursprung zentriert sind und Seitenverhältnisse haben1o: fφ, und stehen alle senkrecht aufeinander. Um zu sehen, dass thectarsaptieo ist1 : , siehe Abbildung 9.

In dieser Abbildung sind alle Winkel des regelmäßigen FünfecksEINÖBnCDE sind108◦. Die LinieAB bildet ein gleichschenkliges Dreieck, △ABC, deren Basiswinkel muss3B6e◦. Wenn wir dann bisec6T ACD mit CF , es ist einfach, die anderen Winkel in der Abbildung zu berechnen, sind wie markiert.

Aber jetzt△ACD ~ △CDF , soAC/CD = CD/DF . Wenn die Seitenlänge des regelmäßigen Fünfecks1iasnd das√ e Länge der unbekannten Diagonale ist erhalten wir:L/1 = 1/(L−1), was leicht zu lösen istLr nachgebenL = φ = (1+ 5)/2.

6 Strebenlängen

Wenn wir die 2V-Kuppel betrachten, wird jedes der äquivalenten gleichförmigen Terirawinkel des Ikosaeders in 4 Dreiecke unterteilt und dann werden die inneren drei Scheitelpunkte über die Oberfläche der einschreibenden Kugel geschoben. Jede der ursprünglichen Seiten jedes Dreiecks wird zu zwei gleichen Teilen an der Funktion der 2V-Kuppel, und drei zusätzliche Teile werden hinzugefügt, um das innere Dreieck zu bilden. Die drei Streben, die das innere Dreieck mapkteheu, sind gleich lang, ebenso die sechs Streben, die durch Unterteilung und Ausschieben aus den Kanten des Ikosaeders. Es ist einfach zu überprüfen durch Berechnung, dass die beiden Längen unterschiedlich sind, aber dass die Streben in der endgültigen Kuppel oder Kugel eine dieser beiden Längen sind.

Eine ähnliche, aber etwas komplexere Analyse zeigt uns die 3V-Dome, genau drei verschiedene Strebenlängen werden benötigt.

Wenn Sie also eine 2V-Dome herstellen, gibt es nur zwei verschiedene Erforderliche Fahrbahnlängen – für die Kuppel, nicht für die Kugel, genau 30 der kürzeren Länge und 35 der längeren Länge werden benötigt. Da die Kuppel beliebig skaliert werden kann, ist es möglich, die optimalen Längen für die beiden Streben zu finden, und Sie können das Rohmaterial auch in festen Längen erwerben.

Ein Standardbaumaterial für Kuppeln ist Stahl-Elceacltrcionduit, das in den Vereinigten Staaten in 10-Fuß-Längen erhältlich ist. Wenn Sie die minimale Anzahl von Kugeln kaufen möchten, um eine Kuppel mit maximaler Größe herzustellen, müssen Sie einfach jede Länge in zwei Stücke schneiden, die in den richtigen Teilen sind kurze Streben und haben 5 extra kurze Streben am Ende es liegt ein Herstellungsfehler vor, und so haben Sie nur wenige Ersatzteile der längeren Länge.) Wenn Löcher in die Enden der Streben gebohrt werden, wird das Problem der Optimierung nur ein kleines bisschen komplizierter.

Mal sehen, wie man die Strebenlängen berechnet, Anfang gwdiese 2V-Kuppel. Wir betrachten das ursprüngliche Dreieck AIJ des im vorherigen Abschnitt aufgeführten Ikosaeders. Die Axpimpraote-koordinaten oEINF , ich undJ sind(0, 1, 1,618), (1, 1.618, 0) und(−1, 1.618, 0), bzw.

Es gibt viele Möglichkeiten, fortfahren, aber ein Ansatz ist dieser. Weed eor eher, dass der Radius der Kugel, in der das Ikosaeder ist zentriert ist $\sqrt{(1+2)}$ = 1,902. Teilen wir also alle Koordinaten b1y.902 wir haben alle Ecken auf der Oberfläche einer Kugel von rad1i.usDie Verwendung der gleichen Namen für die Scheitelpunkte gibt uns othlleowf ing KoordinatensätzeA: = (0, .5257, .8507), ich = (.5257, .8507, 0) undJ = (-.5257, .8507, 0).

Die Längen der SegmenteEINtsIch, IJ undJA sind alle gleich:

$$\sqrt{(.5257^2 + (.8507 - .5257)^2 + .8507^2)} \approx 1.0515.$$

Um den Mittelpunkt von Segmenten zu findenEINTICH, Wir müssen die durchschnittlichen Koordinaten von vert . findenEINEisndICH: (.5257/2, (.5257+ . 8507)/2, .8507/2) = (.2628, .6882, .4254).Eine ähnliche Berechnung ergibt den Mittelpunkt oichfandJ wie(0, .8507, 0). Beide Vektoren haben die gleiche Länge, nam . 8e5l0ja7, Um sie an die Oberfläche der Kugel zu schieben, müssen wir also dividiere alle Koordinaten durch8507, nachgebendM = (.3089, .8090, .5) undN = (0, 1, 0), bzw. wo m undn sind die Positionen der Mittelpunkte der Segmente, nachdem sie an die Oberfläche der Kugel gedrückt wurden.

Die zwei Strebenlängen, die erforderlich sind, um eine Kuppel oder eine Kugel oufsra1dai zu machen, sind also gleich den LängenEINÖm f undMN, was wir berechnen zu sein|:AM| = .5465 und|MN| = .6180.

Angenommen, wir möchten eine optimale 2V-Dome mit 10 . konstruieren t -pfioeoces von elektrischen Leitungen, wo wir planen zu glätten Sie die Enden und bohren Sie Löcher einen Zoll in von jedem Endttatochathe Streben zusammen. Im Grunde gibt es 4 "verschwendete" Zoll, weil wir nach dem Schneiden der tss.trTuhus vier Löcher benötigen, das ursprüngliche Stück der Leitung ist effektiv nur 9 Fuß 8 Zoll oder 9.6666 Zoll lang. Das muss sich teilen intio von|AM|/|MN|, damit die Stücke Längen haben 4.536 Fuß und 5.130 Fuß.

Ähnliche Berechnungen können für jede Kuppel durchgeführt werden. Mit dem Kie nrdmpission von Tara Landry, die gebaut hat und unterhältwww.desertdomes.dom, wir fügen die Strebenlängeninformationen für Unterteilungen hinzu nrs1f V bis 6V Domes. Abbildung 10 zeigt die verschiedenen Längen, die für jede ngtruialar Unterteilung erforderlich sind, und die zugehörigen Tabellen zeigen die Verhältnisse der verschiedenen Längen, vorausgesetzt, Sie möchten m . bauenein edomit Radius 1.0. In Abbildung 10 sind die Streben nur in horizontaler Richtung beschriftet. Die Etiketten können e . sein rodtatot erhält die Längen in den beiden anderen Richtungen.

Darüber hinaus kann die Anzahl der Streben jeder der Längen eine Kuppel (oder im Fall einer Kuppel mit ungeradem V sowohl die kleinere als auch die größere Version) oder eine Kugel bilden. Für Pelxea, m wenn Sie die größere 5V-Kuppel mit Radius machen möchten 1.0 benötigen Sie 30 der „A“-Streben der Länge 0,198144370801, 60 der „B“-Streben usw.

Strebe	Länge	D1	D2	Kugel
EIN	1.05146222424	10	25	30

Strebe	Länge	Kuppel	Kugel
EIN	0.546533057825	30	60
B	0,618033988750	35	60

Strebe	Länge	D1	D2	Kugel
EIN	0.348615488820	30	30	60
B	0.403548212335	40	55	90
C	0.412411489310	50	80	120

Strebe	Länge	Kuppel	Kugel
EIN	0.253184595784	30	60
B	0.294530833739	60	120
C	0.295241808844	30	60
D	0.298588133655	30	60
E	0.312868930080	70	120
F	0.324919696233	30	60

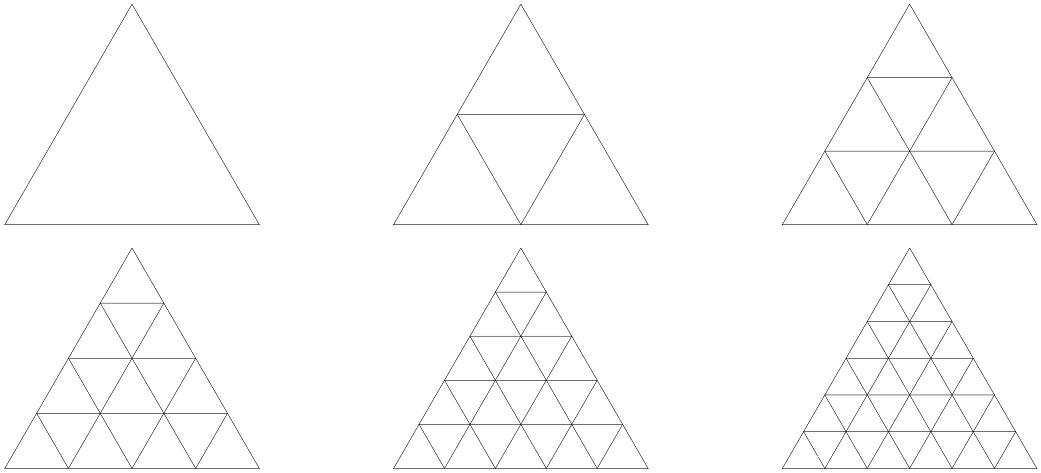


Abbildung 10: Strebenunterteilungslängen

Strebe	Länge	D1	D2	Kugel
EIN	0.198147430801	30	30	60
B	0.225685786566	60	60	120
C	0.231597595641	30	30	60
D	0.231790251268	30	30	60
E	0,245085783201	50	80	120
F	0.245346420565	10	20	30
g	0.247242909849	60	70	120
h	0.255167012309	50	70	120
ich	0.261598097465	30	35	60

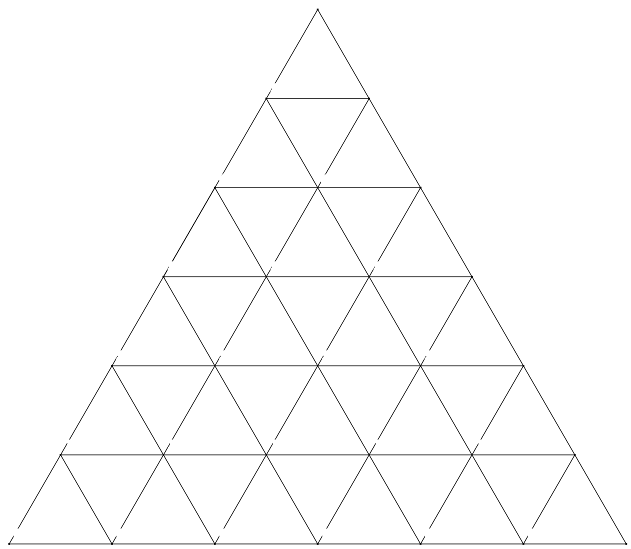
Strebe	Länge	Kuppel	Kugel
EIN	0.162567228883	30	60
B	0.181908254598	60	120
C	0.187383400570	30	60
D	0.190476861168	30	60
E	0.198012574234	60	120
F	0.202819695856	90	180
g	0.205907734855	130	240
h	0.215353730111	65	120
ich	0.216628214422	60	120

Wenn die Kuppel eine gerade V-Form hat, die auf dem Ikosaeder basiert, thp eoimid der ursprünglichen Dreiecke auf dem „Äquator" all genau auf dem Äquator liegen, so dass alle Unterteilungen dieser Teoqriuaal-Linien auch in der Äquatorebene liegen. Wenn diese Punkte an die Oberfläche geschoben werden, liegen sie onatahe eine im Wesentlichen perfekte Ebene und eine so konstruierte Kuppel wird perfekt auf perfekt ebenem Boden liegen.

Bei ungeraden V-Kuppeln mit Grad 3 oder höher gibt es keine Pointeoe nqtu Lasser, also müssen wir uns entscheiden, ob wir nach oben gehen sollen „halber Rang" oder „halber Rang" vom wahren Äquator bis zur Maokuer-Kuppel. In jedem Fall sind die Punkte um einen Rang *nicht* in einem perfekten Flugzeug, aber sie sind nah genug, dass es oft snd'o tmm. Wenn der ungerade Grad größer und größer wird, der Fehler wird immer weniger.

7 Dreieckskoordinaten

Wenn Sie die 3D-Koordinaten der drei Eckpunkte eines tgrlie kennen anin Raum und Sie möchten dieses Dreieck unterteilen hinein n^2 kleinere Dreiecke und um die Koordinaten der Unterteilung zu bestimmen, ist der Vorgang ziemlich einfach. Nehmen wir das Beispiel, wone= 6 also ist das Dreieck unterteilt in6Ö2 = 36 kleinere Dreiecke wie in der folgenden Abbildung:

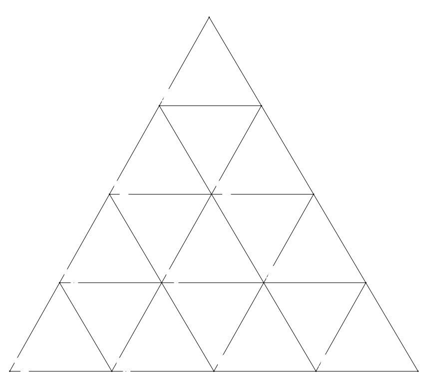


Wenn die 3D-Koordinaten der Punkte oben, unten links a Milliarden odnten rechts sindA, B undC, bzw. dann die Koordinaten der inneren Punkte werden durch die Labeltshe infigur oben, geteilt b6y. Somit ist der mit . bezeichnete Punkt 2A + 3B + 1C wird Koordinaten habenEIN/3 + B/2 + C/6, und so weiter. Die Koordinaten werden einfach generiert. Sta herr her jeder Scheitelpunkt (sagen wirEIN, in diesem Fall werden die Koordinaten b6eA + 0B + 0C - mit anderen Worten, alEIN) und gehen Sie entlang der Linien zum gewünschten Scheitelpunkt. Jedes Mal, wenn Sie vom Scheitelpunkt aus entlang einer lintheindirection gehenQ in Richtung ScheitelpunktR, subtrahiere 1 vonQ Werte und addiere 1 dazuRe Wert.

8 Ein vollständiges Beispiel

In diesem Abschnitt werden wir genau veranschaulichen, wie das Federbein gleth ns berechnet werden. Wir werden es für eine 4V-Dome tun. Die Der allgemeine Plan ist dieser: wir finden die Koordinaten für Paare, die den verschiedenen Strebenlängen entsprechen, bnut oa Kugel mit Radius1S.000. Dann finden wir die Abstände zwischen diesen Paaren. Wenn du zwei bist hish, um eine Geodäte zu machen Kuppel des RadiusR, Sie müssen lediglich alle erhaltenen Strebenlängen multiplizierenRB .

Jedes der ursprünglichen Dreiecke in der Kuppel ist geteilt i1n6Oberteile wie in der folgenden Abbildung:



In jedem der unterteilten Dreiecke gibt es vier Typenooinftp s, beschriftetA, B, C undD in der Abbildung. Wann sie werden auf die Kugeloberfläche projiziert, dort sind unterschiedliche Strebenlängen möglich:AB, BB, BC, BD, CDundDD, wobei wir annehmen, dass die beiden Punkte benachbart sind. um tle zu finden hzeBws berechnen wir Koordinaten für die besonderen Punktev$_0$, v$_1$, . . . , v$_7$ auf das Dreieck (einige innerhalb der Kugel) projizieren wir auch die Oberfläche von eine Einheitskugel, wo sie werdenv$^{Ich}_{0}$e, v$_1$, . . . , v$_{Ich7}$, und wir finden die Längen mit diesen PaiEINrsB = v$_{Ich\ 0}$v$_{Ich}$3, BB = v$_{Ich3}$v$_{Ich}$5, BC = v$_{Ich3}$v$_{Ich}$4, BD = v$_{Ich\ 3}$v$_{Ich}$7, CD = v$_{Ich\ 4}$v$_{Ich}$6 und schlussendlich,DD = v$_{Ich}$6v$_{Ich}$7.

Wir können lassenv$_0$, v$_1$ undv$_2$ seien die Eckpunkte eines der Dreiecke auf dem ursprünglichen icoesdaro hn, und sie sind alle ungefähr ähnlich komplex, sagen wir also:

$$
\begin{aligned}
v_0 &= (0, 1,) \\
v_1 &= (1, \varphi, 0) \\
v_2 &= (\varphi, 0, 1)
\end{aligned}
$$

Alle inneren Eckpunkte des Dreiecks sind einfache linea ormcbinationen vonv$_0$, v$_1$ undv$_2$, so erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
v_3 &= (3/4)v_0 + (1/4)v_2 = ((1/4)\varphi, (3/4), (1/4) + (3/4)\varphi)\ (2/4) \\
v_4 &= v_0 + (2/4)v_2 = ((1/2)\varphi, (1/2), (1/2) + (1/2)\varphi)\ (3/4)v_0 + (\\
v_5 &= 1/4)v_1 = ((1/4), (3/4) + (1/4)\varphi, (3/4)\varphi) \\
v_6 &= (1/4)v_0 + (1/2)v_2 + (1/4)v_1 = ((1/4) + (1/2)\varphi, (1/4) + (1/4)\varphi, (1/2) + (1/4)\varphi)\ (1/2)v_0 + \\
v_7 &= (1/4)v_2 + (1/4)v_1 = ((1/4) + (1/4)\varphi, (1/2) + (1/4)\varphi, (1/4) + (1/2)\varphi)
\end{aligned}
$$

Dennφ ist nur eine Zahlp(hi = 1.61803398 . . .),wir haben:

$$
\begin{aligned}
v_0 &= (0.00000000, 1.00000000, 1.61803398) \\
v_1 &= (1.00000000, 1.61803398, 0.00000000) \\
v_2 &= (1.61803398, 0.00000000, 1.000000000) \\
v_3 &= (0.40450849, 0.75000000, 1.46352549) \\
v_4 &= (0.80901699, 0.50000000, 1.30901699) \\
v_5 &= (0.25000000, 1.15450849, 1.21353549) \\
v_6 &= (0.6508491699, 0.65450849, 0.90450849, \\
v_7 &= 1.05901699)
\end{aligned}
$$

Die Scheitelpunktev$_0$, v$_1$, . . . , v$_7$ sind auf dem Dreieck und außer fvÖ$_0$R, v$_1$ undv$_2$, alle liegen innerhalb der Kugel. Was wir tun werden, ist, jeden der obigen Scheitelpunkte auf einen Sphferraedo zu projizieren ius1.000. Um dies zu tun, wenn der Sinnvt hat Koordinaten v$_{ich}$ = (x$_{ich}$, ja$_{ich}$, z$_{ich}$), können wir die Koordinaten des projizierten Punkts als fol.loFwirsst finden, berechnenR$_{ich}$ = $\sqrt{x^2_{ich} + ja^2_{ich} + z^2_{ich}}$ und dann hat der projizierte Punkt die folgende Koordinaten eins:v$_{ich}$ich = (x$_{ich}$/R$_{ich}$, ja$_{ich}$/R$_{ich}$, z$_{ich}$/R$_{ich}$). Wenn wir das mit dem machen Punkte oben erhalten wir:

$v_0 = (0{,}00000000,\ 0{,}52573111,\ 0{,}85065080)$
$v_1 = (0{,}52573111,\ 0{,}85065080,\ 0{,}00000000)$
$v_2 = (0{,}85065080,\ 0{,}00000000,\ 0{,}52573111)$
$v_3 = (0{,}23885564,\ 0{,}44286271,\ 0{,}86418782)$
$v_4 = (0{,}50000000,\ 0{,}30901699,\ 0{,}80901699)$
$v_5 =$ (0,14762090, 0,581656183502,
$v_6 =$ 0,68190786953, 0,68 0,42532540,
$v_7 =$ 0,58778525, 0,68819096)

Wenn wir zwei Punkte haben $v_i = (x_i, y_i, z_i)$ und $v_j = (x_j, y_j, z_j)$ dann ist der Abstand zwischen ihnen gegeben durch:

$$D_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$$

Um zum Beispiel die Länge von t . zu berechnen EIN eB Strebe, wir müssen den Abstand zwischen berechnen v_0 und v_3. Setzen wir die obigen Zahlen in die Formel ein, ob EIN taB = 0,25318 . . ., was mit den Werten in der Tabelle übereinstimmt. Die anderen Längen können auf ähnliche Weise erhalten werden.

9 Wie viele Streben werden benötigt?

Betrachten wir zunächst das Problem der Bestimmung der Zahlenrto rufts erforderlich, um eine Kugel für jede unterschiedliche Größe herzustellen.

Das anfängliche Ikosaeder besteht aus 20 dreieckigen Flächen 3a0ndedges. Wenn ein einzelnes der Dreiecke unterteilt ist in 1, 4, 9, 16, . . . kleineren Dreiecken kann die Anzahl der Innenkanten aus den Abbildungen entnommen werden: 0, 3, 9, 18, 30, 45. Dies scheint die Formel zu erfüllen 3la $(n^2 - n)/2$, won ist die Anzahl der Unterteilungen jeder Seite. Die Anzahl der Randstreben wird offensichtlich b 3n.

Wir können sehen, dass die obigen Formeln wahr sind, denn wenn wir das ursprüngliche Dreieck intn Ö^2 kleinere Dreiecke, da würde sein $3n^2$ Kanten, aber jede wird doppelt gezählt außer fo3R thoeuter Kanten. Das macht eine tota(l3ÖnF ^{2}-3n)/2 Innenkanten, passend zu der Formel, die wir aus einem Verzeichnis der 6 kleinsten Beispiele erhalten haben.

Für die Kugel gibt es 20 Flächen und 30 Kanten des Oricgoinsalhedrons. Jedes Gesicht wird genera3t(en^2 − n)/2 interne Streben und jede der 30 Kanten wird a3D0D n mehr Streben, für insgesamt o3F0n^2 Streben, und dies stimmt mit den Werte in den Tabellen.

Für die geraden-V-Kuppeln können wir diese Zahl nicht ganz in den Hainlfc schneiden, da es die Linie der Streben gibt, die entlang des Bodens liegen. Wenn wir die Zahl halbieren, werden wir nur die am Boden liegenden Streben einbeziehen, also müssen wir uns darauf einstellen.

Wenn n gerade ist, dann hat ein -V-Dome5n Streben am Boden. Somit ist die Gesamtzahl der Streben rot qufoean n-V-Kuppel, won gerade ist, ergibt sich aus der Formel 3:0n^2/2 + 5n/2. Diese Formel stimmt mit den Werten in unseren Tabellen für 2V, 4V und 6V Domes überein.

Für die ungeraden V-Dome ist die Berechnung nicht allzu schwer. Wir makuepapner (kleinere) ungerade-V-Kuppel, indem wir eine ungerade-V-Kugel in zwei Hälften schneiden, aber nicht auf einer Reihe.

Tatsächlich wird der Schnitt schneiden 10n Streben, also die Gesamtzahl der Streben im kleineren ungeraden V-Edoismus, gegeben durch $(30n^2 - 10n)/2$ was wiederum mit den Werten in den Tabellen übereinstimmt.

Schließlich müssen wir für die größere ungerade V-Kuppel zu diesem evath . hinzufügen Lue Struts, die wir in Scheiben geschnitten haben 1:0n davon, plus das neue untere Streben: 5n von ihnen insgesamt fünfzehn n^2 + 10n.

10 (teilweise) offenes Problem

Wenn Sie eine Kuppel auf Ikosaeder-Basis bauen, wie viele Unterschiede nt Längen werden benötigt?

Dies scheint eine schwierige Frage zu sein, und ich war nicht draußen abfilndt eine schöne Lösung. Mit einem Computerprogramm kann ich konnte für die ersten Teilgrößen folgende Daten ermitteln:

1V 2V	3V 4V	5V 6V	7V 1 2	3 6 9	9 16		8V	9V	10V
							20	18	30
11V 12V	13V	14V 15V	16V	17V 18V	19V	20V 36	30 49	56 45	72 81
63 100 110									

Ich kann keinen Hinweis auf diese Sequenz finden und habe suebdm ititt die Online-Encyclopedia of Integer Sequences bei:

http://www.research.att.com/~njas/sequences/A097108

Ich habe keinen Beweis für die folgenden Formeln, aber sie passen perfekt zu den Daten und haben alle eine ähnliche Form. Wenn die obige Sequenz aloswfosl in sechs Streams unterteilt ist:

$$ein_0, B_0, C_0, D_0, e_0, F_0, ein_1, B_1, C_1, D_1, e_1, F_1, ein_2, B_2, \ldots,$$

dann jede Untersequenzeine$_0$,(ein$_1$, ein$_2$, . . .oder B_0, B_1, B_2, . . .,et cetera), hat eine schöne Form, wie folgt:

$$\begin{aligned} ein_n &= (3n+1)^2 \\ B_n &= (3n+1)(3n+2) \\ C_n &= 3(2n+1)(n+1) \\ D_n &= 3(3n+2)(n+1) \\ e_n &= 9(n+1)^2 \\ F_n &= 3(2n+3)(n+1) \end{aligned}$$

11 Kuppeln auf Tetraeder- und Oktaederbasis

Es gibt keinen Grund, warum Sie nicht mit einem Tetraeder beginnen können Oh hedron, unterteilen Sie die Dreiecke und schieben Sie die Scheitelpunkte in die einschreibende Sphäre aus und mache nacheinander beptp terroximationen zu einer Kugel.

Bei einem Tetraeder entsteht ein großes Problem, wenn Sie Taove wünschen ha Kuppel statt einer kompletten Kugel, da die Tetraeder hat keinen natürlichen „Äquator“ wie der icosanhewdhre auf seinen Dreiecken sind in eine gerade Anzahl von Unterdreiecke oder wie das Oktaeder mit jeder Art von Unterteilung.

In gewisser Weise könnte das Oktaeder dann besser erscheinen für geodätische Kuppeln als das Ikosaeder, da die 1V, 2V, 3V, . . . darauf basierende Kuppeln haben alle eine flache baTshee. Das Problem ergibt sich aus der Tatsache, dass mehr Unterteilungen erforderlich sind und somit mehr unterschiedliche Längen erforderlich sind von Streben gleicher Länge, da es leicht ist, eine kleine Anzahl von Ersatzteilen zu haben, falls es daamnadgteh ist, würde der Herstellungsprozess eine geringere Anzahl von Vorrichtungen erfordern.

Endlich, obwohl man sie fast nie in der echten w,oFrilg . sieht dure 11 zeigt, was 1V bis 6V oktaedrisch Kuppeln aussehen würde.

Die letzte Abbildung in Abbildung 12 ist die geodätische Kuppel un"tdheer man" beim Burning Man 2004. Sie wurde zusammen mit dem Mann am 4. September 2004 verbrannt.

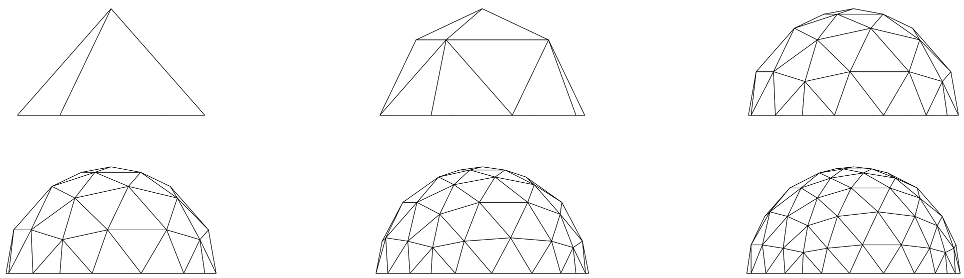


Abbildung 11: 1V bis 6V Oktaederdome

Abbildung 12: 4V Dome bei Burning Man 2004